Chapitre III

Infinité des extensions faiblement harmoniques pour une donnée au bord non constante

Construction d'un dipôle

Tristan Rivière

Résumé: Soit Ω un domaine de $I\!R^3$ et (S^2, g) une sphère de dimension deux. On prouve l'existence d'une infinité d'applications harmoniques de Ω dans (S^2, g) pour toute condition au bord non constante donnée.

1 Introduction

Soit Ω un domaine borné de $I\!R^3$, soit S^2 la sphere unité de $I\!R^3$ et (Σ, h) une surface homeomorphique à S^2 munie d'une métrique h. On notera $A(\Sigma)$ le volume de Σ. On peut toujours supposer, en utilisant le Théorème de Nash-Moser, que Σ est immergée isommétriquement dans un espace Euclidien $I\!R^k$. On considère alors l'espace de Sobolev suivant:

$$H^1(\Omega, \Sigma) = \{u \in H^1(\Omega, I\!R^k) \text{ tel que } u(x) \in \Sigma \ p.p. \ x \in \Omega\}. \quad (1)$$

Soit $u \in H^1(\Omega, \Sigma)$; on note $E(u)$ son énergie de Dirichlet:

$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$. Supposons u régulière dans le voisinage d'un point a de Ω excepté peut être en a, on note $deg(u, a)$ le degré de u en a (voir [1]). Il est parfois très utile d'insérer, à une application régulière de $H^1(\Omega, \Sigma)$, des singularités de degré non nul, tout en la maintenant dans $H^1(\Omega, \Sigma)$ et en utilisant le moins d'énergie possible. Le procédé le plus basique consiste à insérer ces singularités par couples, les deux singularités ayant réspectivement les degrés opposés $+1$ et -1 pour des raisons topologiques simples; ce procédé est apparu pour la première fois dans [1] sous le nom "d'insertion d'un dipôle". Il s'agissait alors d'insérer un dipôle à une application constante de $I\!R^3$ dans S^2:

Théorème 1 *[1] Soient p et n deux points de $I\!R^3$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe u_ϵ dans $H^1(I\!R^3, S^2)$ tel que p et n soient les seules singularités de u_ϵ et tel que*

$$\begin{aligned} &a)\ deg(u_\epsilon, p) = +1 \quad deg(u_\epsilon, n) = -1 \\ &b)\ E(u_\epsilon) < 8\pi\,|p-n| + \epsilon \end{aligned} \tag{2}$$

Ce résultat est optimal: pour tout $u \in H^1(I\!R^3, S^2)$ dont l'ensemble singulier est $\{p, n\}$ avec $deg(u,p) = +1$ et $deg(u,n) = -1$ on a: $E(u) \geq 8\pi\,|p-n|$.

Dans [2] F.Bethuel généralise l'insertion du dipôle à une application régulière d'un domaine quelconque de $I\!R^3$ dans S^2 de la manière suivante:

Théorème 2 *[2] Soit Ω un domaine de $I\!R^3$, soient p et n deux points distincts quelconques de Ω tels que le segment $[p,n]$ soit inclus dans Ω, soit O un ouvert de $I\!R^3$ inclus dans Ω et contenant $[p,n]$ et u une application régulière de $H^1(\Omega, S^2)$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $u_\epsilon \in H^1(\Omega, S^2)$ tel que $\{p,n\}$ soit l'ensemble singulier de u_ϵ et tel que:*

$$\begin{aligned} &a)\ u_\epsilon = u \quad dans\ \ \Omega \setminus O \\ &b)\ deg(u_\epsilon, p) = +1 \quad deg(u_\epsilon, n) = -1 \\ &c)\ E(u_\epsilon) \leq E(u) + 8\pi\,|p-n| + \epsilon \end{aligned} \tag{3}$$

Le caractère optimal du Theorème 1 nous empêche d'espérer,dans le cas général, une insertion de dipôle $\{p,n\}$ usant moins d'énergie que $2A(\Sigma) \times |p-n|$, ce qui souligne l'intêret du résultat suivant, qui est notre contribution principale dans ce papier:

Théorème 3 *Soit u une application non constante et régulière de $H^1(\Omega, \Sigma)$ et soit x_0 un point de Ω tel que $\nabla u(x_0) \neq 0$; alors pour tout $\rho > 0$ il existe un bipoint (p,n), de milieu x_0, et $v \in H^1(\Omega, \Sigma)$ tels que p et n soient les seules singularités de v et tels que*

$$\begin{aligned} &(a)\ v = u \ \ en\ dehors\ de\ B_\rho(x_0) \\ &(b)\ deg(v,p) = +1 \quad deg(v,n) = -1 \\ &(c)\ E(v) < E(u) + 2A(\Sigma)\,|p-n| \end{aligned} \tag{4}$$

La différence principale entre le théorème 2 et le théorème 3, dont la démonstration est bien plus technique, vient essetiellement du fait que dans le théorème 2 le dipôle que l'on insère est préscrit ; le théorème 3 est un résultat asymptotique: on met à profit la non nullité du gradient en un point pour insérer, dans son voisinage, un dipôle qui use strictement moins d'énergie que $2A(\Sigma) \times$ (*sa longueur*) (ce qui n'était pas possible avec l'application constante dans le théorème 1); en échange, par contre, on ne maîtrise ni sa longueur ni sa direction (autrement que par la connaissance approfondie du gradient de u en ce point et de ses différentes normes C^k).

L'idée de l'inégalité stricte (c) apparaît dans [3], elle est issue d'une inégalité stricte similaire de H.Brezis et J.M.Coron mais en dimension deux ([4] lemme 2); nous en donnons une justification heuristique dans la partie 2.

Notons enfin, que le théorème 3 a été démontré dans le cas particulier de la symétrie axiale pour $\Sigma = S^2$ par R.Hardt, F.H.Lin et C.Poon dans [5].

L'intérêt de cette inégalité stricte est multiple: dans [5] elle joue un rôle déterminant pour décrire avec précision l'ensemble singulier d'applications minimisant des énergies relaxées (voir ce terme dans [6]) et pour prouver un résultat d'existence d'applications harmoniques à lieu singulier prescrit (voir aussi [7]); dans [8] elle joue aussi un rôle central nous permettant de prouver l'existence d'applications harmoniques de $H^1(\Omega, \Sigma)$ partout discontinues; enfin, ici, sur une idée de [3], elle nous permet de prouver l'existence d'une infinité d'applications harmoniques de $H^1(\Omega, \Sigma)$ pour une condition au bord fixée:

Théorème 4 *Soit ϕ une application régulière non constante de ∂B^3 dans Σ, il existe une infinité d'applications de $H^1(\Omega, \Sigma)$ telles que*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = A(u)(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}) + A(u)(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}) + A(u)(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}) \\ \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \\ u \in \Sigma \qquad \textit{presque partout} \\ \\ u/\partial\Omega = \phi \end{array} \right. \tag{5}$$

Où $A(u)$ désigne la seconde forme fondamentale de Σ dans $\mathbb{R}^k$ prise au point $u(x)$.

La déduction du théorème 4 à partir du théorème 3 est essentiellement due à F.Bethuel, H.Brezis et J.M.Coron [3]. Nous présentons leurs arguments dans la section 3.

Remarque : (5) signifie simplement que u est faiblement harmonique à valeur dans Σ et a pour donnée au bord ϕ.

L'existence d'une infinité d'applications harmoniques pour une condition au bord donnée avait déja été démontrée moyennant des hypothèses supplémentaires (voir [6] et [9]).

2 Démonstration du théorème 3

Nous ne donnons ici qu'une idée de la démonstration qui est faite intégralement dans [8]

On peut toujours supposer $x_0 = 0$. Soit (i, j, k) une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $u_x(0,0,0) = \nabla u(0).i \neq 0$.

Soit δ suffisament petit (δ est fixé à la fin de la preuve). On transforme u dans le cylindre C_δ centré en 0, d'axe Oz, de rayon $2\delta^2$ et de longueur $2(\delta + \delta^2)$. On note u^δ l'application transformée:

a) A chaque côte z entre $-\delta + \delta^2$ et $\delta - \delta^2$, on interpole "linéairement" sur la surface Σ l'application u à l'extérieur de C_δ et une application conforme qui envoie le petit disque horizontal de centre $(0,0,z)$ et de rayon δ^2 dans une grande partie de la surface Σ exactement comme le font H.Brezis et J.-M.Coron dans [4] (lemme 2) pour $\Sigma = S^2$.

b) Soient $p = (0,0,\delta)$ et $n = (0,0,-\delta)$. Dans le petit cylindre c_δ^p (resp. c_δ^n) centré en p (resp. n), de rayon $2\delta^2$, d'axe Oz et de hauteur $2\delta^2$, u^δ est l'extension radiale centrée en p (resp. en n) de sa valeur au bord du petit cylindre.

L'inégalité stricte obtenue peut se comprendre simplement de la manière suivante:

à chaque côte z_0 dans C_δ (c'est à dire pour z_0 entre $-\delta+\delta^2$ et $\delta-\delta^2$) la densité d'énergie, $E_{z_0} = \int_{C_\delta \cap \{z=z_0\}} |\nabla_{x,y} u|^2 \, dx \, dy$ issue des seules dérivations horizontales en x et en y, due à l'application conforme est

$$2 \times (la\ surface\ couverte\ par\ cette\ application\ conforme)$$

c'est à dire

$$2 \times (l'aire\ de\ (\Sigma\ -\ une\ petite\ portion\ autour\ de\ u(0)))$$

Lorsque l'on intègre E_z sur z entre p et n on obtient l'énergie

$$2A(\Sigma)\ |p-n|\ -\ (une\ petite\ quantite\ =\ \alpha > 0)$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la somme des énergies issues des dérivations suivant z, de l'interpolation entre u et les applications conformes et de l'énergie des extensions radiales dans c_δ^p et c_δ^n est plus petite que α. Une étude asymptotique nous montre que ceci est vrai pour δ choisi suffisament petit.

3 Démonstration du théorème 4

Soit ϕ une application régulière non constante de $\partial\Omega$ dans Σ. On note

$$H^1_\phi(\Omega,\Sigma) = \{u \in H^1(\Omega,\Sigma) \text{ tel que } u = \phi \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Soient u et v deux éléments de $H^1_\phi(\Omega,\Sigma)$; on note

$F_v(u) = E(u) + 2A(\Sigma)\ L(u,v)$ l'énergie relaxée généralisée de u, à v fixé, (voir [6] et [8]) où $L(u,v)$ désigne la connexion minimale entre u et v (voir [1], [6] et [8]). On rappelle le résultat démontré dans [6]: les F_v et E ont mêmes points critiques donc toute application minimisante de F_v est faiblement harmonique.

Deux situations sont envisageables:

a) Il y a une infinité d'applications minimisantes de E sur $H^1_\phi(\Omega,\Sigma)$: le problème est trivial.

b) Il n'y a qu'un nombre fini d'applications minimisantes de E sur $H^1_\phi(\Omega, \Sigma)$.

Soient $w_1, ..., w_n$ ces applications minimisantes. D'après les résultats de régularité partielle de Schoen et Uhlenbeck [10] , les w_i n'ont qu'un nombre fini de singularités.

Soit x_0 dans Ω un point distinct des singularités des w_i tel que $\nabla w_1(x_0) \neq 0$. Soit ρ suffisamment petit (fixé plus loin); on applique le théorème 3 à w_1, x_0 et ρ: soit v_1 l'application w_1 à laquelle on a inséré un dipôle suivant le théorème 3, on a:

$$E(v_1) < E(w_1) + 2A(\Sigma)\, L(v_1, w_1) \tag{6}$$

Soit u_1 une application minimisante de F_{v_1}: montrons que, pour ρ suffisamment petit, u_1, qui est une application faiblement harmonique de $H^1_\phi(\Omega, \Sigma)$, est distincte de tous les w_i.

Soit w_k tel que $L(w_k, w_1) = 0$, nous avons:

$$\begin{aligned} F_{v_1}(w_k) &= E(w_k) + 2A(\Sigma)\, L(w_k, v_1) \\ &= E(w_1) + 2A(\Sigma)\, L(w_1, v_1) \\ &> E(v_1) = F_{v_1}(v_1) \geq F_{v_1}(u_1) \end{aligned} \tag{7}$$

Donc $w_k \neq u_1$ dans ce cas.

Soit maintenant w_k tel que $L(w_k, w_1) > 0$, nous avons:

$$L(w_k, v_1) + L(v_1, w_1) \geq L(w_k, w_1) \tag{8}$$

et donc

$$L(w_k, v_1) \geq L(w_k, w_1) - 2\rho \tag{9}$$

ainsi

$$\begin{aligned} F_{v_1}(w_k) &= E(w_k) + 2A(\Sigma)\, L(w_k, v_1) \\ &\geq E(w_1) + 2A(\Sigma)\, L(w_k, w_1) - 4A(\Sigma)\, \rho \end{aligned} \tag{10}$$

Soit ρ un réel tel que $0 < \rho < Min\left\{\frac{L(w_i, w_1)}{4}; \ i \text{ vérifiant } L(w_i, w_1) > 0\right\}$,

on a $L(w_k, w_1) - 2\rho > 2\rho \geq L(w_1, v_1)$; en utilisant (10) on obtient:

$$F_{v_1}(w_k) > F_{v_1}(w_1) \geq F_{v_1}(u_1) \tag{11}$$

Donc u_1 est distincte de tous les w_k.

On construit par reccurence une suite u_n d'applications harmoniques toutes distinctes entre elles et distinctes des w_i en prenant u_{n+1} application minimisante de $F_{v_{n+1}}$, où v_{n+1} est l'application w_1 à laquelle on a inséré un dipôle en x_0 suivant le théorème 3, et pour $\rho = \rho_{n+1}$ vérifiant les inégalités suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < \rho_{n+1} < Min\left\{\frac{L(w_i, w_1)}{4}; \ i \text{ vérifie } L(w_i, w_1) > 0\right\} \\ \\ 0 < \rho_{n+1} < Min\left\{\frac{E(u_i) - E(w_1)}{16\pi}; \quad i = 1...n\right\} \end{array}\right. \tag{12}$$

La première inégalité de (12) assure, comme précédemment, que u_{n+1} est distincte des w_i, la seconde nous assure, moyennant des vérifications simples semblables aux estimations établies précédemment, que $u_{n+1} \neq u_i$ pour $i \leq n$. Le théorème est donc démontré.

Je tiens à remercier Fabrice Bethuel, Haïm Brezis et Jean-Michel Coron pour avoir attiré mon attention sur ce problème et m'avoir permis d'insérer dans ce travail leur preuve Théorème 3 ⇒ Théorème 4.

References

[1] H.Brezis J.-M.Coron and E.Lieb. Harmonic maps with defects. *Comm.Math.Phys.*, 107:(1986), 649–705.

[2] F.Bethuel. A characterization of maps in $h^1(b^3, s^2)$ which can be approximated by smooth maps. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 7:(1990), 269–286.

[3] F.Bethuel H.Brezis and J.-M.Coron. *Communications privées.*

[4] H.Brezis and J.M.Coron. Large solutions for harmonic maps in two dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 92:(1983), 203–215.

[5] R.Hardt F.H.Lin and C.Poon. Axially symmetric harmonic maps minimizing a relaxed energy. *Comm. Pure Appl.*, 45:(1992), 417-459.

[6] F.Bethuel H.Brezis and J.-M.Coron. Relaxed energies for harmonic maps. *in Variational Problems (H.Berestycki, J.M.Coron, I.Ekeland, eds.),Birkhauser*, 1990.

[7] T.Rivière. Harmonic maps from b^3 into s^2 having a line of singularities. *C.R.A.S.*, 101:(1991), 583–587.

[8] T.Rivière. Everywhere discontinuous harmonic maps from b^3 into s^2. *prépublication*, 1992.

[9] R.Hardt D.Kinderlehrer and F.H.Lin. The variety of configurations of static liquid crystals. *Proceedings of variational problems workshop, Ecol. Norm. Sup., Birkhauser*, 1990.

[10] R.Schoen and K.Uhlenbeck. A regularity theory for harmonic maps. *J. Diff. Geom.*, 17:(1982), 307–335.

Adresses:

CMLA, ENS Cachan
61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN CEDEX

Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Paris VI
4, place Jussieu
75005 Paris